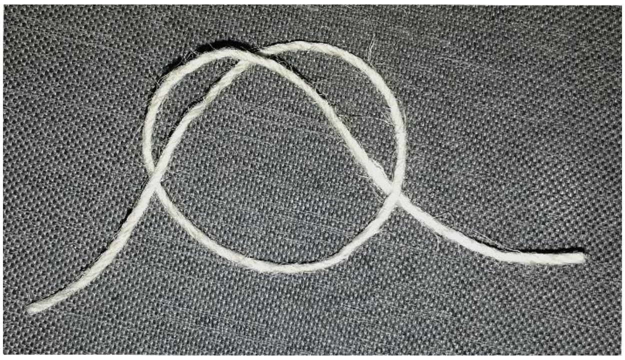
Solmuista

Solmut ovat olleet ihmiskunnan seurana vuosituhansia, ja solmuihin liittyvä tietous on ollut tärkeää monelle ammattiryhmälle merimiehistä vaattureihin. Omaksi matematiikan alakseen solmuteoria muodostui hiljalleen 1800-luvun aikana. Suuria läpimurtoja on tehty 1900-luvulla ja 200-luvulla, ja solmuteoriassa on yhä avoimia kysymyksiä.

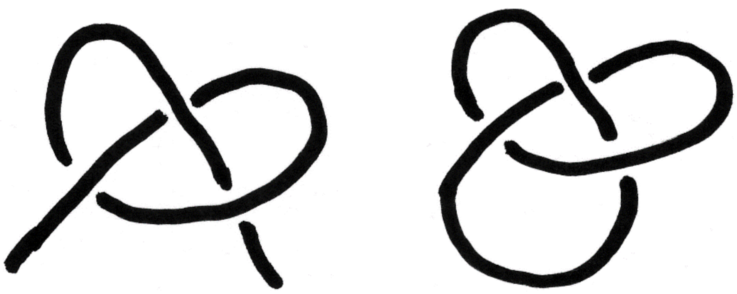
Solmujen merkitseminen

Fyysisen maailman solmu voi näyttää esimerkiksi tältä. Kyseessä on päätesolmu eli umpisolmu.

Solmun voi aina levittää auki niin, että kaikki kohdat, joissa naru risteää itsensä kanssa, ovat näkyvissä.



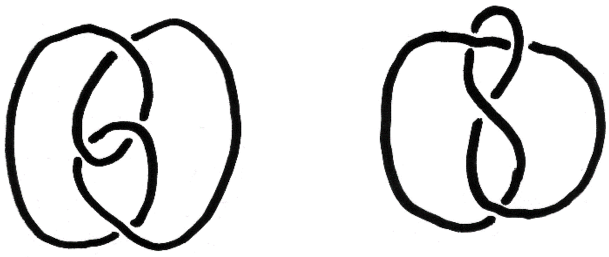
Tällaisesta muodosta voidaan piirtää *kaavio*, kuten vasemmalla alla. Matemaattisissa yhteyksissä *solmulla* tarkoitetaan yleensä yhtenäistä lenkkiä, ikään kuin narun päät olisi yhdistetty, kuten oikealla alla. Tällä määritelmällä on se etu, että solmua voi venyttää mielin määrin vailla pelkoa siitä, että solmu purkautuu.



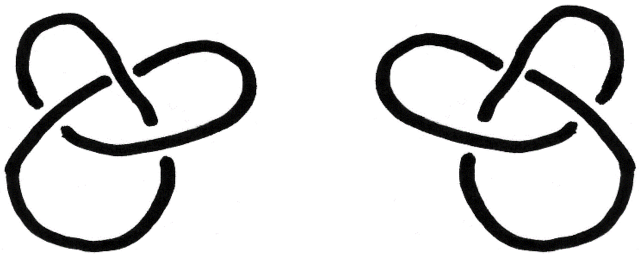
Solmuteorian yhteydessä yllä oikealla olevaa solmua kutsutaan nimellä *apilasolmu* tai *kolmiapilasolmu*.

Tehtävä 1. Tee naruun hieman monimutkaisempi solmu ja piirrä siitä kaaviokuva kuten edellä. Voit kiinnittää narun päät yhteen esimerkiksi hakaneulalla tai teipillä.

Tehtävä 2. Tee narusta seuraavien kahden kaavion mukaiset solmut. Kiinnitä narun päät esimerkiksi hakaneulalla tai teipillä. Totea kokeilemalla, kuvaavatko kaaviot samaa solmua vai eri solmua. Solmut lasketaan samoiksi, jos ne voi muuttaa toisikseen rikkomatta lenkkiä.



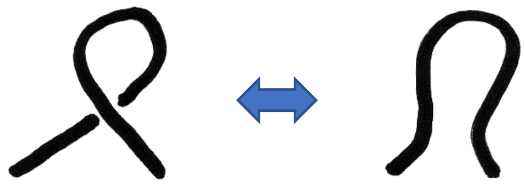
Tehtävä 3. Tutki narun avulla, ovatko apilasolmu ja sen peilikuva sama solmu. Muodollista todistusta ei tarvita.



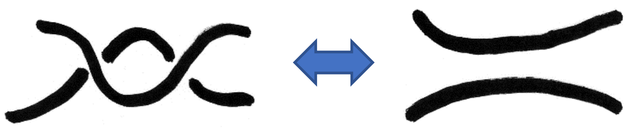
Tehtävä 4. Tutki narun, ovatko kahdeksikkosolmu ja sen peilikuva sama solmu. Muodollista todistusta ei tarvita.

Reidemeister-siirrot

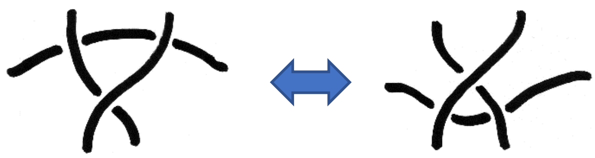
Eräs tapa verrata solmuja toisiinsa tehdä niiden kaavioiden risteyskohtiin pieniä vaiheittaisia muutoksia ilman, että itse solmu muuttuu. Kurt Reidemeister osoitti vuonna 1927, että kaikki mahdolliset muutokset voidaan toteuttaa yhdistämällä seuraavaa kolmea pientä muutosta sopivasti.



Tyypin I Reidemeister-siirto: Kierto tai sen purku

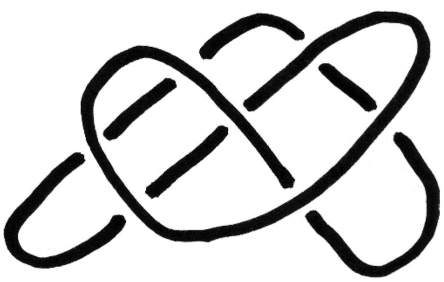


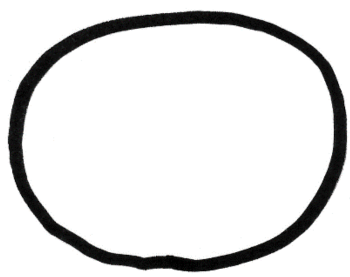
Tyypin II Reidemeister-siirto: Kurkistus tai sen purku



Tyypin III Reidemeister-siirto: Liu'utus risteyksen ohi

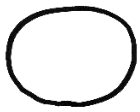
Tehtävä 5. Mikä on pienin määrä Reidemeister-siirtoja, joilla voit muuttaa vasemmanpuoleisen kaavion oikeanpuoleiseksi? Koska muutos on mahdollinen, kumpikin kaavio kuvaa samaa solmua: pelkää tyhjää lenkkiä eli *triviaalisolmua*.



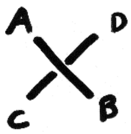


Solmun risteysluku

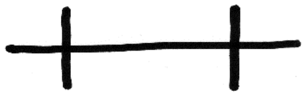
Kuten tehtävän 5 esimerkki osoittaa, samalla solmulla voi olla kaksi eri kaavioita, joissa eri määrät risteyksiä. Koska risteysten lukumäärä on kokonaisluku ja sillä on alaraja, nimittäin nolla, täytyy jokaisella solmulla kuitenkin olla pienin määrä risteyksiä, joka sen kaaviossa voi olla. Tämä minimimäärä risteyksiä on solmun *risteysluku*. Triviaalin solmun risteysluku on nolla, koska sille voidaan piirtää kaavio ilman risteyksiä:



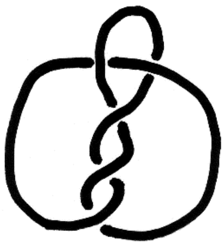
Tehtävä 6. Osoita, että minkään solmun risteysluku ei ole 1. Voi aloittaa piirtämällä yhden risteyksen ja yhdistämällä langan päät kaikilla mahdollisilla tavoilla luomatta uusia risteyksiä. Tämän jälkeen riittää tarkistaa, että kussakin tapauksessa syntynyt solmu on itse asiassa triviaali solmu.



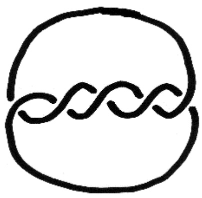
Tehtävä 7. Tutki, kuinka monen eri solmun risteysluku on 2. Tässä voi olla hedelmällistä piirtää ensin kaikki mahdolliset kahden risteyksen kaaviot ottamatta kantaa siihen, kummin päin risteykset kulkevat. Tämän jälkeen tutki kustakin kaaviosta eri vaihtoehdot sen mukaan, kummin päin risteyksen kulkevat.



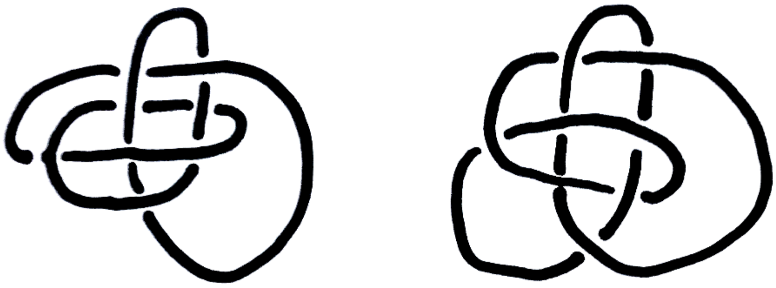
Tehtävä 8. Voidaan osoittaa, että vain apilasolmun ja sen peilikuvan risteysluku on 3. Kahdeksikkosolmu puolestaan on ainoa solmu, jonka risteysluku on 4. Risteysluvulla 5 sen sijaan löytyy kaksi luonteeltaan erilaista solmua. Ne on esitetty alla. Vasemmalla on viisilehtinen apila ja oikealla kolmen kierron solmu.

Eräs tapa erottaa nämä solmut toisistaan on aloittaa jostakin kohtaa lankaa ja kiertää koko silmukka läpi. Annetaan risteyksille nimilaput A, B, C, D ja E siinä järjestyksessä, kun ne tulevat vastaan. Koska kunkin risteyksen läpi kuljetaan kahdesti, kierroksen aikana syntyy 10-kirjaiminen ”sana”. Vertaa yllä olevan kahden solmun sanoja. Mikä perustevanlaatuinen ero niissä on? Tämä ominaisuus säilyy, vaikka solmujen kaavioita muuttaisi. Luokittele alla olevat solmut edellä kuvatun periaatteen mukaan.

Tehtävä 9. Valitettavasti risteyksistä sanan muodostaminen edellisen tehtävän tapaan ei riitä erottamaan kaikkia solmuja toisistaan. Osoita, että seuraavilla solmuilla on sama risteyksistä muodostuva ”sana”. Kyseessä ei kuitenkaan ole sama solmu. (Tätä ei tarvitse osoittaa.)



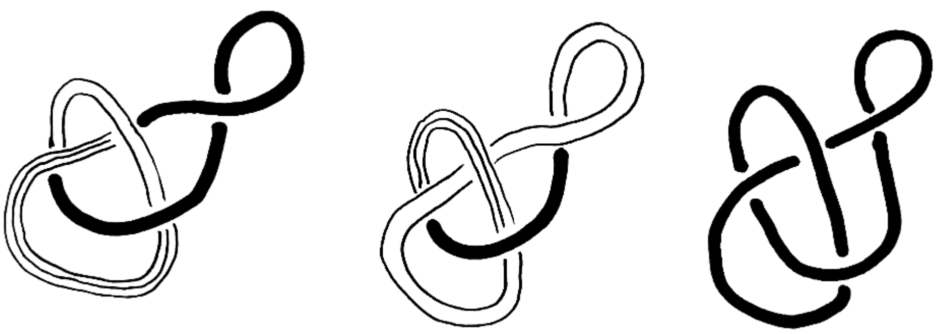
Solmujen kolmivääritykset

Solmujen erottaminen toisistaan on vaikeaa, sillä yhdellä ja samalla solmulla on rajattomasti erilaisia kaavioita. Olisikin siis eduksi löytää solmuille *invariantteja*, eli ominaisuuksia, jotka ovat muuttumattomia solmun kaikkien eri muotojen välillä. Näiden solmuinvarianttien vertailu mahdollistaa solmujen erottamisen toisistaan. Aiemmin esitelty risteysluku on esimerkki solmuinvariantista, mutta sen määrittäminen voi olla hyvin työlästä.

Yksinkertainen esimerkki solmuinvariantista on kolmiväritettävyys: solmut voidaan jakaa kahteen kategoriaan sen mukaan, voidaanko ne värittää kolmella värillä vai ei. Kolmivärityksellä on seuraavat säännöt:

1. Solmun kaavion jokainen osa on väritetty.
2. Värejä on käytössä vähintään kaksi ja enintään kolme.
3. Jokaisessa risteyksessä kohtaavat kolme osaa ovat joko kaikki erivärisiä tai kaikki samanvärisiä.

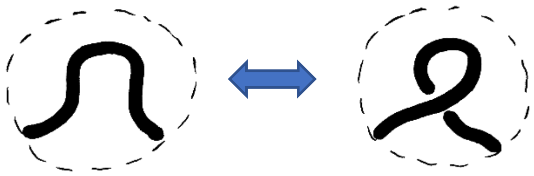
Tehtävä 10. Alla on sama solmu väritettynä kolmella eri tavalla. Vain yksi näistä tavoista on sääntöjen mukainen kolmiväritys. Mikä?



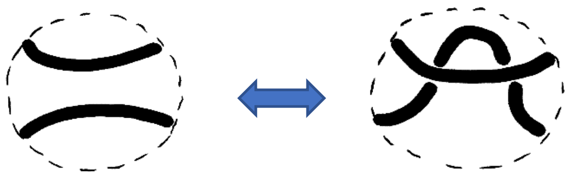
Kolmiväritettävyys on solmuinvariantti

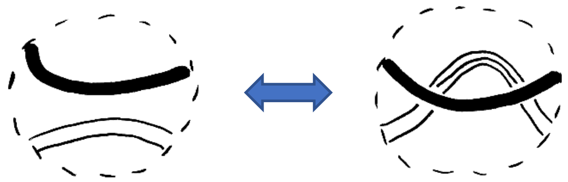
Kolmiväritettävyys on koko solmun eikä vain sen tietyn kaavion ominaisuus, sillä jos yhden solmun jonkin kaavion voi kolmivärittää, solmun kaikki muutkin kaaviot voi kolmivärittää. Tämän voi perustella osoittamalla, että kolmiväritetty kaavio on kolmiväritettävissä minkä tahansa Reidemeister-siirron jälkeenkin. Todistuksessa on oleellista, että muutetulta alueelta ulospäin lähtevien osien väritystä ei muuteta. Näin paikalliset muutokset värityksessä eivät aiheuta ongelmia muissa osissa kuviota.

Tyypin I Reidemeister-siirto voi koska vain tilanteita, joissa käytössä on yksi väri, joten ongelmia ei muodostu. (Värejä voi olla vain yksi, sillä jos jälkimmäisen kuva osat olisi väritetty kahdella värillä, syntyvä kahden värin risteys rikkoisi kolmivärityksen sääntöjä.)

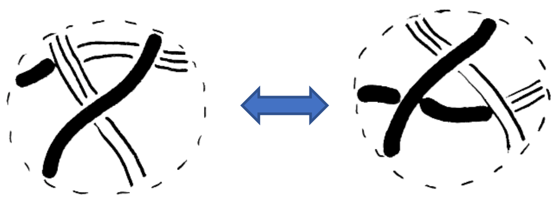


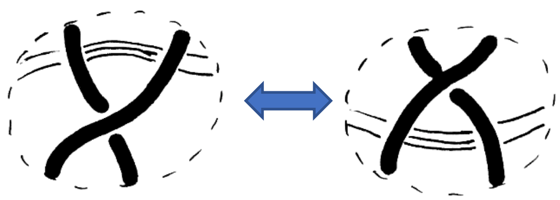
Tyypin II Reidemeister-siirroissa on kaksi kolmivärityksen kannalta mahdollista vaihtoehtoa: joko kaikki neljä alueen reunaan koskevaa osaa ovat samaa väriä, tai värejä on kaksi.





Tyypin III Reidemeister-siirtoja tutkittaessa vaihtoehtoja eri värityksille on useita. Kaksi tapausta on esitelty alla, ja muutkin ovat väritettävissä vastaavasti.

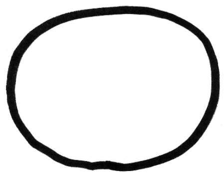




Koska Reidemeister-siirrot säilyttävät kolmiväritettävyyden, kolmiväritettävyys on solmuinvariantti.

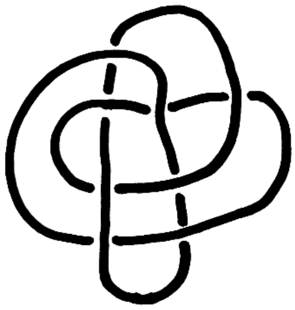
Tehtävä 11. Minkä vuoksi edellisen tarkastelun tyypin II Reidemeister-siirrossa ei tule kysymykseen tapaus, jossa alueen reunoilla olisi käytössä kolme väriä?

Tehtävä 12. Osoita, että triviaalisolmu ei ole kolmiväritettävä, mutta apilasolmu on. Tämä on eräs tapa perustella, että nämä kaksi todella ovat eri solmut.



Tehtävä 13. Onko kahdeksikkosolmu kolmiväritettävä?

Tehtävä 14. Onko tämä solmu kolmiväritettävä?



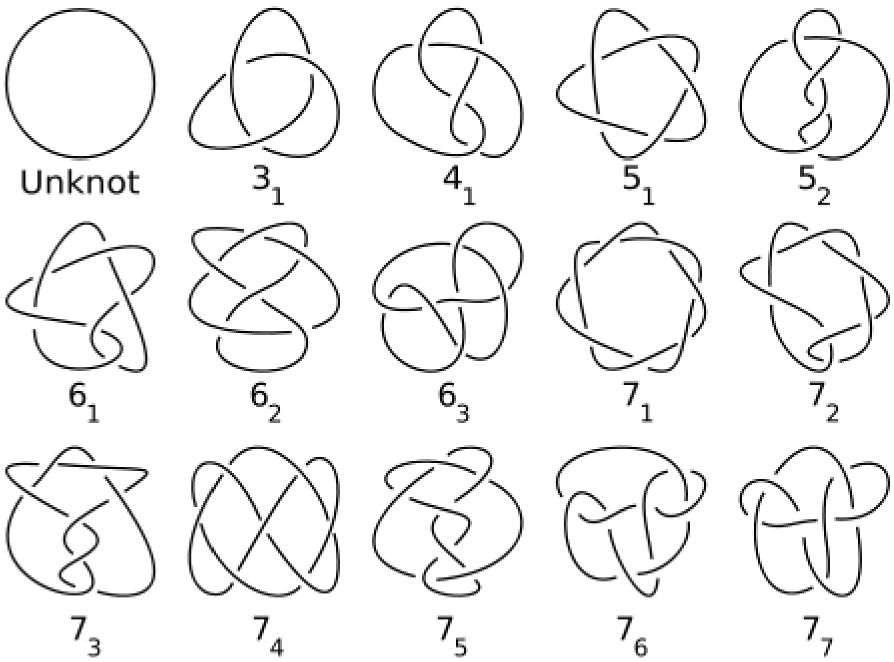
Muista solmuinvarianteista

Kolmiväritettävyys ei tietenkään auta erottamaan kaikkia solmuja toisistaan, sillä se jakaa solmut vain kahteen joukkoon: solmun joko voi värittää kolmella värillä tai sitten ei voi. Tarkastelun laajentaminen neljällä, viidellä tai useammalla värillä väritettäviin solmuihin ei juuri paranna tilannetta.

Solmujen luokittelemiseksi on kehitelty erilaisia edistyneempiä solmuinvariantteja, kuten vaikkapa Jonesin polynomit ja HOMFLY-polynomit, mutta nekään eivät erota kaikkia solmuja toisistaan. Solmuteorian Graalin malja olisi solmuinvariantti, joka olisi helposti laskettavissa mille tahansa solmulle, ja joka olisi jokaiselle eri solmulle eri. Tällaista ei kirjoitushetkellä (2022) tunneta.

Lisätietoa: Alkusolmut

Alkusolmu on solmu, jota ei voi muodostaa yhdistämällä kahta risteysluvultaan positiivista solmua saman langan varteen. Alla on risteysluvultaan pienimmät alkusolmut risteyslukuun 7 asti. Peilikuvia ei ole tässä listattu erikseen, vaikka ne olisivatkin eri solmu.



Kuvan lähde: Wikimedia Commons, laatija Jkasd, vapaa käyttö
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Knot_table.svg

Alkusolmujen lukumääriä on selvitetty tietokoneen avulla pitkälle, mutta yleinen kaava alkusolmujen lukumäärälle risteysluvun funktiona on avoin ongelma.

Lähteet

Päälähde on erinomainen kirja [1]. Lähteitä [3] [4] on hyödynnetty erityisesti solmutermistön suomennoksissa.

[1] Akveld, M., A. Jobbings: Knots Unravelled: From string to mathematics, Arbelos, 2011.

[2] Gupta, T: An Introduction to Knot Theory, 2018
https://www.math.tamu.edu/~tanujgupta17/knot_theory.pdf

[3] Kulikov, V: *Solmuja taiteessa ja matematiikassa*, Matematiikkalehti Solmu, 2/2010.
https://matematiikkalehtisolmu.fi/2010/2/solmu.pdf

[4] Sossinsky, A.: *Solmut. Erään matemaattisen teorian synty*, Art House, 2002.

[5] Wikimedia Commons, kuva laatijalta Jkasd, vapaa käyttö
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Knot_table.svg